



**ملاحظات:** لدينا  $(V, \wedge, \vee, E)$  شبكات توزيعية ونقوى على العنصرين 0 و 1 وكان للعنصر  $x$  فيها مكمل  $x'$  فثبتت كنت المتك وحيد البرهان.

لنفرض أولاً أن للعنصر  $x$  مخصص  $x_1$  و  $x_2$

$$\begin{aligned} x \wedge x_1 = 0 \text{ و } x \vee x_1 = 1 & \quad x \wedge x_2 = 0 \text{ و } x \vee x_2 = 1 \\ x \wedge x_1 = 2 \wedge x_2 & \quad x \vee x_1 = 2 \vee x_2 \end{aligned}$$

وبما أن الشبكات توزيعية وحسب مبرهنات سابقة  
نتج أن  $x_1 = x_2$

**ملاحظات 2:** «هامات»

إذا كانت  $(V, \wedge, \vee, E)$  شبكات توزيعية ونقوى العنصرين 0, 1 وكان للعنصرين  $x$  و  $y$  مكملات في هذه الشبكات فكل واحد من العنصرين عند تحقق المساوات التالية:

$$(x \wedge y)' = x' \vee y' \quad (1)$$

$$(x \vee y)' = x' \wedge y' \quad (2)$$

«قانون دي مورغان»

الاثبات

(1) لدينا

$$(x' \vee y') \vee (x \wedge y) = [x' \vee y] \wedge [x' \vee y \vee y]$$

$$= (x' \vee x) \vee y' = 1 \vee y' = 1$$

بما أن الشبكات توزيعية

$$(x \wedge y) \wedge (x' \vee y') = [(x \wedge y) \wedge x'] \vee [(x \wedge y) \wedge y']$$

$$(0 \wedge y) \vee (0 \wedge x) = 0 \vee 0 = 0$$





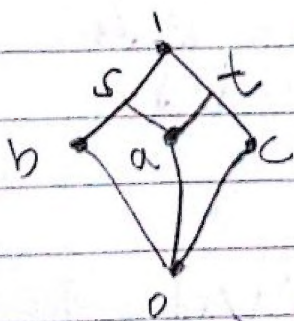
ستتبع أن صمم العنصر  $(x, y)$  هو  $x \vee y$   
 الحقا نون الأول  $x \vee y = (x \wedge y)'$

2) ولنفرض الطرفان نثبت أن  $(x \vee y)' = x' \wedge y'$

\* **مبرهنة:** إذا كانت  $(E, \vee, \wedge)$  شبكة توزيعية وتحتوي  
 العنصرين  $0$  و  $1$  عندئذ فإن العناصر التي لها مكملة في  $E$   
 تشكل شبكة جزئية من  $E$  مكملة.  
**البرهان:**

لتفرض  $M$  مجموعة جزئية من  $E$  تحتوي جميع العناصر التي لها مكملة  
 أي أن:  $x \in M \Leftrightarrow x' \in M$

إن العنصرين  $0$  و  $1$  هما عنصران من  $M$  وذلك لأن لكل  
 عنصر  $x$  مكملة  $x'$  صمم  $0$  و  $1$  صمم  $1$   
 أن إذا كان  $x, y \in M$  فحسب مبرهنة سابقة  
 $x \vee y \in M$  و  $x \wedge y \in M \Rightarrow (x \wedge y)' = x' \vee y'$   
 هذا يعني أن  $M$  شبكة جزئية من  $E$



\* **مثال:** لتكن لدينا الشبكة الممثلة لجزء  $AP$  كما

أن هذه الشبكة غير توزيعية لأن

$$t \wedge (b \vee c) = t \quad \text{حيث العنصر } t$$

$$(t \wedge b) \vee (t \wedge c) = c$$

$$(b \vee c) = 1 = b \vee t$$

$$b \wedge c = 0 = b \wedge t \Rightarrow c \neq t$$

إن المجموعة  $M$  هي مجموعة العناصر التي يحللك مكملة  
 في هذه الشبكة.

$$M = \{0, 1, b, c, t, s\}$$

لأنه شبكة جزئية  $(S \wedge t = a \notin M)$



## الشبكات البوليانية للشبكات بول 11:

نحسب أي شبكات  $(A, \vee, \wedge, \neg)$  تحتوي 1، 0 توزيعية ومنتجة  
شبكات بول أو شبكات بوليانية. لأي شبكات فيها لكل

عنصر صحيح ووحيد 11

\* مثال:  $(A, \vee, \wedge, \neg)$  هي شبكات بوليانية

$D(32)$ ،  $D(42)$  هي شبكات بوليانية

$D(12)$  هي ليست بوليانية

في هذا المثال: إن تلك شبكات بوليانية يجب أن تتوافق فيها

الشروط الأربع

(1) يوجد فيها العنصرين 0 و 1

(2) لكل عنصر من  $E$   $x \in E$  يوجد صحيح ووحيد

وإذا كان  $y \in E$  يجب يكون  $x \wedge y = 0$  فإن  $x \leq y$

دلالة لأن:

$$y = y \wedge 1 = y \wedge (x \vee x') = (y \wedge x) \vee (y \wedge x')$$

$$= 0 \vee (y \wedge x') = y \wedge x'$$

$$\Rightarrow y \leq x'$$

$$\forall x \in E: (x')' = x \quad 0' = 1 \quad 1' = 0 \quad (3)$$

(4) عناصر الشبكات البوليانية تحقق قانون دي مورغان:

$$(x \vee y)' = x' \wedge y'$$

$$(x \wedge y)' = x' \vee y'$$

في الشبكات البوليانية أهمية كبيرة لصلتها الوثيقة بحلقات  
بول وحير بول الذي يسرنا بتفصيل أكثر في الفصل  
القادم. (5)



الموزع  $\mu$  و الإيزومورفزم الشبكي :

تعريف الموزع الشبكي :

يقول أن  $f$  الموزع الشبكي إذا كانت  $f: (M, \leq) \rightarrow (N, \leq)$

أيضا موزع شبكي إذا تحقق الشرطان :

$$1) f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$$

$$2) f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) \quad \forall x, y \in M$$

تعريف الإيزومورفزم الشبكي :

ونقول أن  $f$  إيزومورفزم شبكي ترتيبي إذا كان بالإضافة

لكونه موزعاً، أن يكون متباينة وحاصراً

الموزع العاكس للترتيب

و يعرف الموزع الشبكي العاكس للترتيب إذا تحقق الشرطان :

$$1) f(x \wedge y) = f(x) \vee f(y)$$

$$2) f(x \vee y) = f(x) \wedge f(y)$$

و إذا كان بالإضافة كذلك متبايناً وحاصراً

إيزومورفزم شبكي عاكس للترتيب

إذا كانت الشبكتان متساويتان شبيبتاً أو توحدت

1- إذا كانت  $f$  شبكي ترتيبي فإن  $f$  هو موزع ترتيبي

الاثبات :

$$x \leq y \Rightarrow y = x \vee y \Rightarrow$$

$$f(y) = f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$$

موزع؟ شبكي ترتيب

$$\Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

مثال :

2- إذا كانت  $f$  شبكي عاكس للترتيب فإن  $f$  هو عاكس للترتيب

$$x \leq y \Rightarrow x = x \wedge y \Rightarrow f(x) = f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$$

$$\Rightarrow f(x) \geq f(y)$$



\* مبرهن: إذا كان  $f$  تقابلًا من الشبكات (أي  $n \in \mathbb{N}$ )،  
عندئذ فإن:

1- إذا  $f$  هو  $n$  و  $m$  من  $n$  شبكات ترتيبية، إذا وفقط إذا كان  
 $f$  ترتيبية

2- إذا  $f$  هو  $n$  و  $m$  من  $n$  شبكات عاكس للترتيب، إذا وفقط إذا كان  
 $f$  عاكس للترتيب

الاثبات:

1- لنرى الشرط

وحيث أن  $f$  هو  $n$  و  $m$  من  $n$  شبكات ترتيبية، هو  $m$  من  $n$  ترتيبية

وحيث أن  $f$  تقابلًا، أي أن  $f^{-1}$  هو  $m$  من  $n$  ترتيبية، أي  $f$  هو  $m$  من  $n$  ترتيبية

المترتبة  $f$  هي  $(n, \leq)$  في  $(M, \leq)$

أي  $n_1 \leq n_2$  و  $f(n_1) \leq f(n_2)$ ،  $m_1 = f^{-1}(n_1)$ ،  $m_2 = f^{-1}(n_2)$

فإن:

$$f(m_1 \vee m_2) = f(m_1) \vee f(m_2) = n_1 \vee n_2 = n_2$$

ومن ثم:

$$m_1 \vee m_2 = f^{-1}(n_1) \vee f^{-1}(n_2) = f^{-1}(n_2) = m_2$$

$$\Rightarrow m_1 \leq m_2 \Rightarrow f(m_1) \leq f(m_2)$$

2- كفافة الشرط

لنفترض أن  $f$  هو  $n$  و  $m$  من  $n$  ترتيبية، أي  $f$  هو  $m$  من  $n$  ترتيبية (أي  $M, \leq$ )

$$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$$

حيث أن  $x \leq x \vee y$  و  $y \leq x \vee y$

وحيث أن  $f$  ترتيبية، إذا  $f(x) \leq f(x \vee y)$  و  $f(y) \leq f(x \vee y)$

فإن  $f(x) \vee f(y) \leq f(x \vee y)$

$$f(x) \vee f(y) \leq f(x \vee y) \quad \text{حيث أن}$$

$$f(x) \leq f(x \vee y) \quad \text{و} \quad f(y) \leq f(x \vee y)$$







فان  $0 \leq x \leq 1$  دبا ان  $f$  ايزومورفزم سبكي ترتيب فان

$$f(0) \leq f(x) \leq f(1)$$

$$f(0) \leq y \leq f(1)$$

عن  $f(x)$

لنفرض ان  $x$  متتم  $M$

$$x \wedge x' = 0$$

$$x \vee x' = 1$$

$$x \wedge x' = 0 \Rightarrow f(x) \wedge f(x') = f(0)$$

$$x \vee x' = 1 \Rightarrow f(x) \vee f(x') = f(1) \Rightarrow (f(x))' = f(x')$$

نتيجة: ان الشبكات المنتهية والتي تكون  $0, 1$  هاس لها  
متشابه ايزومورفيك مع بعضها البعض.

مثال 1:

$$E = \{a, b, c\} \text{ حيث } (P(E), \leq, \wedge, \vee)$$

متشابه هاس لها سبكي  $0, 1$  الشبكات  $D(4,2)$  عند فان

$$P(E) \cong D(4,2) \cong D(5,0) \cong D(7,0)$$

نور سبكي ومنتج

مثال 2: اذا كان  $S$  هو سبكي توليانيك  $(S, \leq, \wedge, \vee)$  عند ها

$\forall a \in S$  فان الدالة  $[a, a] \times [a, a] \rightarrow S$  المعرفة بالتك

$$\theta(a) = (2 \wedge a, 2 \vee a)$$

ايزومورفزم سبكي ترتيب